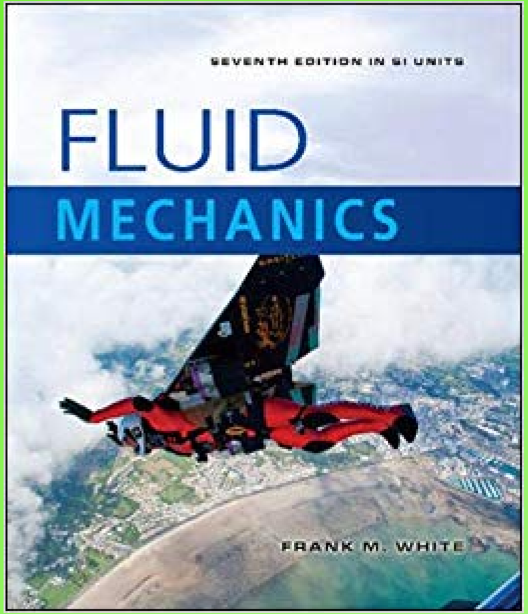


مکانیک سیالات ۲

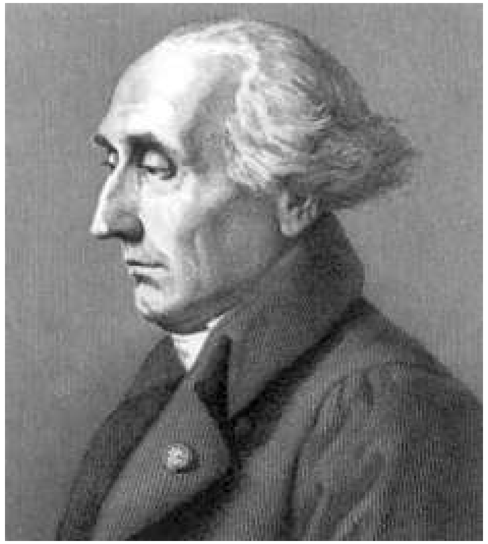
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

فصل چهارم: معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان سیالات
بخش اول: سینماتیک جریان سیالات

کلاس درس دکتر نوروزی
فروردین ۱۴۰۰

دیدگاه لاگرانژی:

دیدگاه لاگرانژی، رویکردی در مکانیک است که معطوف به اجسام مادی جهت تحلیل دینامیک حرکت آنها است. در این رویکرد با استفاده از یک یا چند دستگاه مختصات، تعقیب اجسام (ذرات) مادی در گذر زمان انجام می شود و به این ترتیب امکان تعیین موقعیت (مسیر) و در نهایت سایر پارامترهای مربوط به حرکت ذرات نظیر، سرعت، شتاب و ... وجود خواهد داشت. دیدگاه لاگرانژی بیشتر در مکانیک جامدات متداول است.



Joseph Luis Lagrange
(1736–1813)

دیدگاه اویلری:

دیدگاه اویلری رویکرد دیگری در مکانیک است که معطوف به فضا جهت تحلیل دینامیک حرکت ذرات موجود در موقعیت های مختلف مکانی است. بنابراین در دیدگاه اویلری کلیه کمیت ها نظیر سرعت، فشار، دما و ... میدانی محسوب می شوند (یعنی علاوه بر زمان تابع مکان هم هستند). به بیان ساده تر، در دیدگاه اویلری، در هر نقطه موردنظر در میدان جریان می توان مشخصات جریان مانند سرعت، شتاب و ... را در زمانهای مختلف بدست آورد و به ذرات عبوری و این که از کجا آمده اند و به کجا می روند، توجهی نمی شود. به دلیل آنکه در مکانیک سیالات با تعداد فوق العاده زیادی از ذرات روبرو هستیم، استفاده از دیگاه اویلری در مکانیک سیالات بسیار به صرفه تر و متداول است.

Leonhard Euler
(1707–1783)

عملگرها در مکانیک سیالات

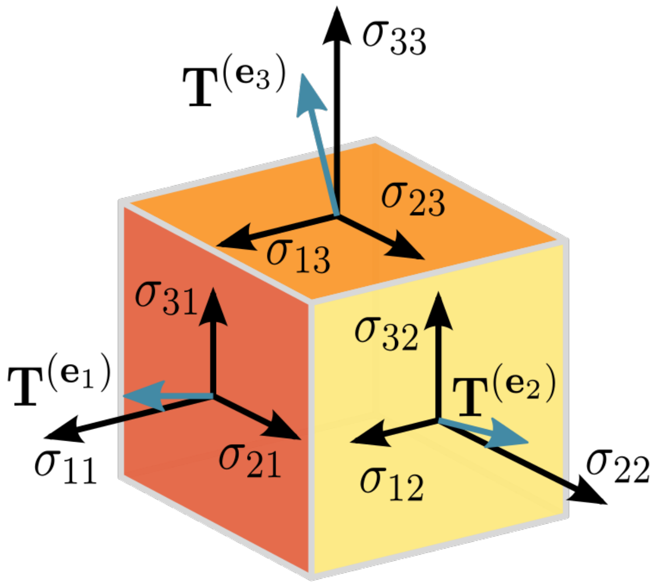
همانطور که گفته شد کمیتهای فیزیکی در دیدگاه اویلری میدانی هستند، یعنی علاوه بر زمان تابع مکان هم هستند، مثلا برای کمیت های اسکالری مثل فشار، چگالی، دما و .. داریم:

$$p = p(x, y, z, t),\ \ \rho = \rho(x, y, z, t),\ \ T = T(x, y, z, t)\ \ \& \ldots$$

به طور مشابه برای کمیتهای برداری داریم:

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\mathbf{k}$$

نکته: در اینجا بردارها و تانسورها بصورت بولد نمایش داده شده اند.



مفهوم تانسور: تانسور مفهومی ریاضی است که برای بیان کمیت های فیزیکی و مولفه هایشان مورد استفاده قرار می گیرد. مرتبه یک تانسور (rank) معرف ابعاد ریاضی و یا به عبارتی تعداد مولفه های آن است:

تعداد مولفه های تانسور در فضای سه بعدی = 3^{rank}

تانسور مرتبه صفر: کمیتهای اسکالر نظیر فشار، دما، چگالی و ... که با یک عدد (مولفه) بیان می شوند، تانسور مرتبه صفر هستند.

تانسور مرتبه یک: کمیتهای برداری نظیر سرعت، شتاب و ... که با سه مولفه بیان می شوند تانسور مرتبه یک محسوب می شوند.

تانسور مرتبه دوم: کمیتهایی نظیر تنش، کرنش و نظایر آن که با ۹ مولفه بیان می شوند، تانسور مرتبه دوم نامیده می شود. بصورت یک غلط مصطلح، واژه تانسور عمدتا به تانسورهای مرتبه دوم اطلاق می شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

عملگرهای تانسوری متداول

۱- عملگر گرادیان (∇): گرادیان یک عملگر مشتق گیر نسبت به جهات مکانی است. این عملگر بصورت مستقل مقدار مشتقات تابع را نسبت به هر جهت محاسبه کرده و حاصل آنرا بصورت مولفه های جداگانه گزارش می کند. عملگر گرادیان، مرتبه عبارت حاصله را یک واحد افزایش می دهد. بنایراین گرادیان کمیتهای اسکالر مانند فشار، دما و ... یک بردار خواهد بود:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k} \qquad \& \qquad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \tag{۱}$$

از آنجا که گرادیان مرتبه عبارت حاصل را یک واحد زیاد می کند، بنابراین انتظار می رود که گرادیان یک بردار، یک تانسور مرتبه دوم باشد. برای نمونه، گرادیان سرعت از رابطه مقابل محاسبه می شود:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{۲}$$

۲– عملگر دیورژانس

عملگر دیورژانس ضرب داخلی عملگر ∇ است و با اعمال آن، مرتبه یک واحد کاهش پیدا می کند. با این توصیف حاصل دیورژانس یک کمیت برداری نظیر سرعت یک کمیت اسکالر است:

$$\left.\begin{aligned}\nabla(\ ) &= \frac{\partial(\ )}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial(\ )}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial(\ )}{\partial z}\mathbf{k}\\ \mathbf{V} &= u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \rightarrow \nabla.\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (۳)$$

از لحاظ فیزیکی دیورژانس یک بردار، میزان «شار خروجی» یا «جذب از محیط» یک میدان برداری را در یک نقطه بوسیله یک عبارت اسکالر علامت دار اندازه‌گیری می‌کند. همچنین دیورژانس یک تانسور مرتبه دوم نظیر تنش، یک بردار خواهد بود:

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma}=\nabla.\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\right)\mathbf{i}+ \qquad (۴)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

۳– عملگر لاپلاسین

عملگر لاپلاسین (∇^2)، مهمترین عملگر بیضوی در مبحث مشتقات جزئی است و لاپلاسین یک کمیت فیزیکی بصورت دیورژانس گرادیان آن کمیت تعریف می شود. مثلا برای گرادیان دما داریم:

$$\nabla^2 T = \nabla . \nabla T \qquad (۵)$$

بنابراین با اعمال متوالی دو عملگر گرادیان و دیورژانس، مرتبه عبارت حاصله تغییر نمی کند، اما چون هر دو عملگر گرادیان و دیورژانس مشتق گیر هستند، حاصل به شکل جمع مشتقات مرتبه دوم در می آید:

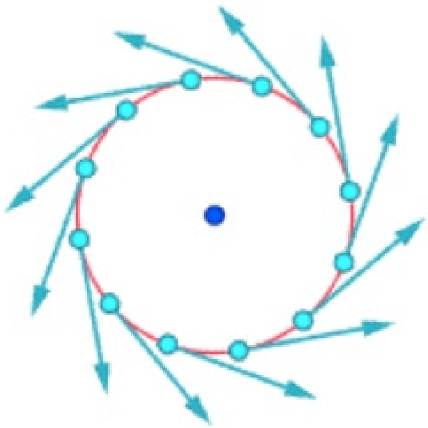
$$\left.\begin{aligned} \nabla(\ ) &= \frac{\partial(\ )}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\mathbf{k} \\ \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \nabla^2 T = \nabla . \nabla T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (۶)$$

این عملگر معرف پخش (نفوذ) کمیتهای فیزیکی در یک محیط مادی است (نظیر پخش دما در هدایت حرارتی).

برای کمیتهای برداری مثل سرعت نیز حاصل گرادیان به شکل مشابهی تعریف می شود:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \nabla^2 u\,\mathbf{i} + \nabla^2 v\,\mathbf{j} + \nabla^2 w\,\mathbf{k} \qquad (۷)$$

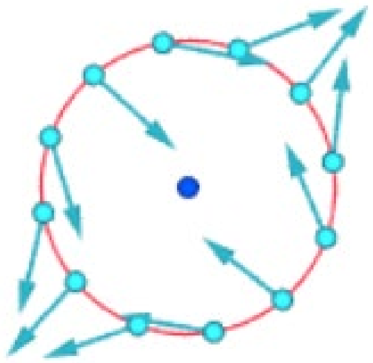
۴– عملگر کرل



Vorticity ≠ 0

عملگر کرل، ضرب خارجی بردار گرادیان است و برای یک کمیت سرعت مقدار آن برابر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\omega} = Curl\,\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \qquad (۸)$$



Vorticity = 0

کرل بردار سرعت به Vorticity معروف است و با محاسبه دترمینان فوق، داریم:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (۹)$$

عملگر کرل، برای توصیف چرخش میدانهای برداری مورد استفاده قرار می گیرد.

۵– عملگر مشتق مادی

همانطور که پیشتر گفته شد در دیدگاه اویلری، کلیه کمیتهای میدانی هستند (یعنی بجز زمان تابع مکان نیز هستند). لذا دیفرانسیل کامل یک کمیت دلخواه میدانی مانند $Q=Q(t,x,y,z)$ برابر است با:

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial t}dt+\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz \qquad (۱۰)$$

با تقسیم کردن طرفین به dt داریم:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial Q}{\partial z} \qquad (۱۱)$$

دیفرانسیل کامل یک کمیت میدانی نسبت به مکان به مشتق مادی معروف است و معمولا برای آن از نماد $\frac{D}{Dt}$ استفاده می شود. همچنین باید توجه داشت عبارات dx/dt، dy/dt و dw/dt مولفه های سرعت u، v و w هستند. لذا برای رابطه فوق داریم:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+u\frac{\partial Q}{\partial x}+v\frac{\partial Q}{\partial y}+w\frac{\partial Q}{\partial z} \qquad (۱۲)$$

به سادگی می توان نشان داد که مشتق مادی بر حسب عملگر گرادیان، به شکل زیر قابل بیان است:

$$\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla Q \qquad (۱۳)$$

مفهوم شتاب مادی

مشتق مادی میدان سرعت به شتاب مادی معروف است. لذا از روابط (۱۲) و (۱۳) برای شتاب مادی داریم:

$$\mathbf{a}=\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \qquad (۱۴)$$

بایستی توجه داشت که شتاب مادی یک بردار است. برای مولفه های می توان نوشت:

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}=\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{D}{Dt}\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=\frac{Du}{Dt}\mathbf{i}+\frac{Dv}{Dt}\mathbf{j}+\frac{Dw}{Dt}\mathbf{k} \qquad (۱۵)$$

از روابط (۱۲) و (۱۳) برای مولفه های مشتق مادی (رابطه (۱۵)) داریم:

$$\begin{aligned}
a_x&=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla u=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
a_y&=\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla v=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (۱۶)\\
a_z&=\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla w=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

یادآوری بسط تیلور

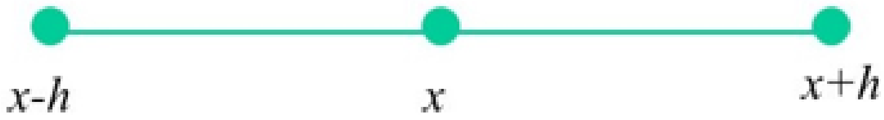

Brook Taylor (1685-1731)

برای توابع پیوسته و مشتق پذیر سری توانی بصورت زیر وجود دارد:

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{[n]}(x)h^{n}$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^{2}+\frac{1}{3!}f'''(x)h^{3}+\dots \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق، $f^{[n]}$ معرف مشتق n ام تابع f است.



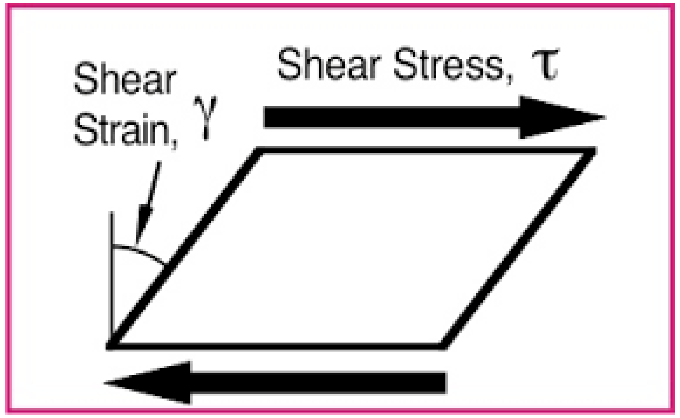
نکته: چنانچه مقدار h کوچک باشد:

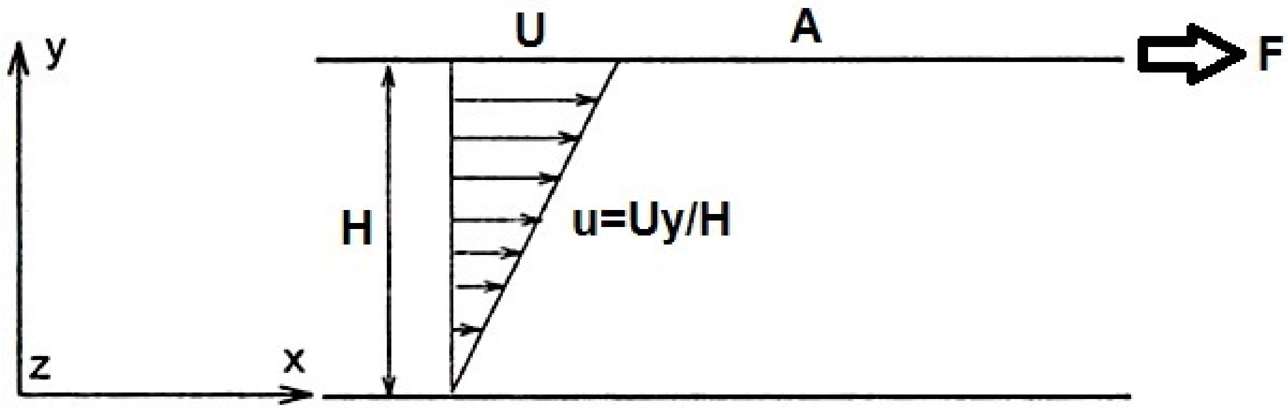
$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h \qquad (۱۸)$$

مفهوم نرخ برش

به زاویه تغییر شکل ماده تحت تنش برشی، کرنش برشی (shear strain) گفته می شود (زاویه γ در شکل زیر). نرخ برش ($\dot{\gamma}$) عبارت است از مشتق زمانی کرنش برش که در جریانهای دو بعدی ساده که با پروفیل یک متغیره برای یک مولفه سرعت بیان می شوند (مانند جریان برشی ساده که u فقط تابع y است)، به شکل زیر تعریف می شود:

$$\text{For Simple Profiles } (u=u(y)): \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{du}{dy} \qquad (۱۹)$$





Simple Shear Flow (Couette Flow)

نرخ برش در جریانهای دوبعدی

در حالت کلی دو بعدی، نرخ برش بصورت مجموع نرخ زوایای تغییر شکلهای برشی ناشی از هر دو مولفه سرعت u و v تعریف می شود:

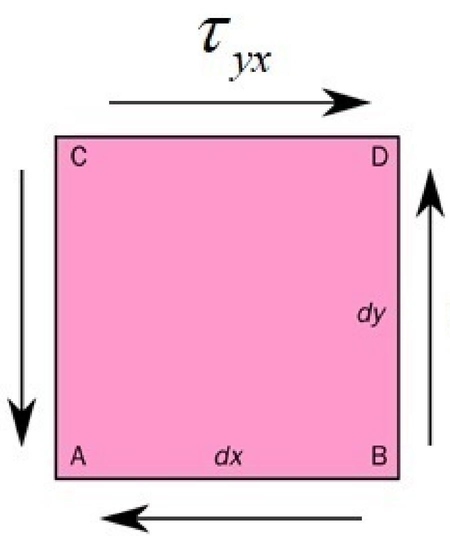
$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}$$

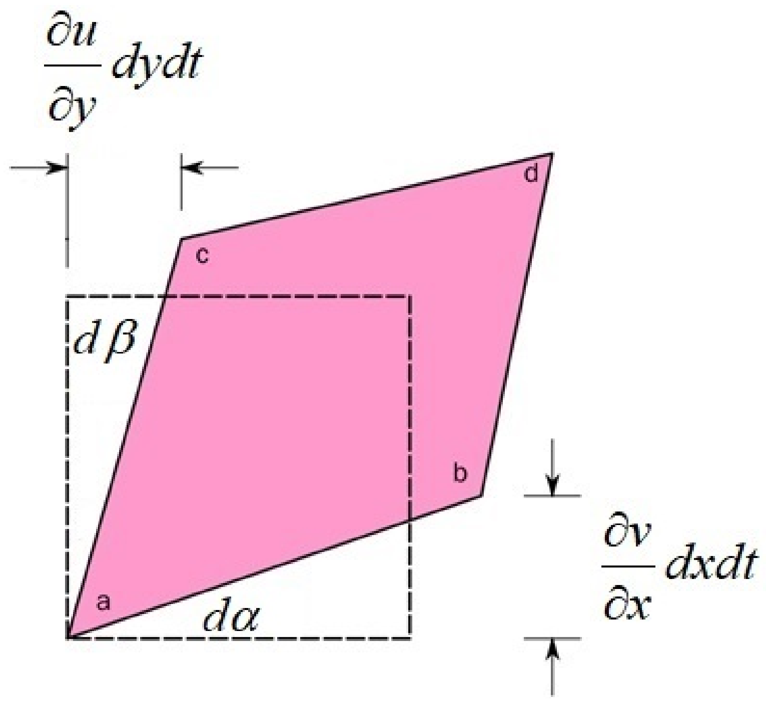
$$d\alpha = \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial v/\partial x)\,dx\,dt}{dx + (\partial u/\partial x)\,dx\,dt}\right] = \frac{\partial v}{\partial x}dt$$

$$d\beta = \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial u/\partial y)\,dy\,dt}{dy + (\partial v/\partial y)\,dy\,dt}\right] = \frac{\partial u}{\partial y}dt$$

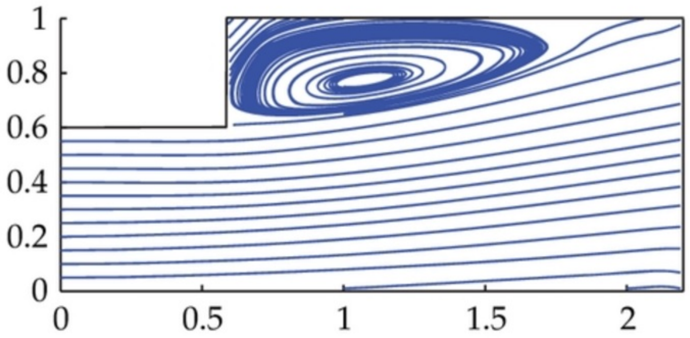
در نهایت از روابط فوق نتیجه می شود:

For 2D Flows: $$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (۲۰)$$





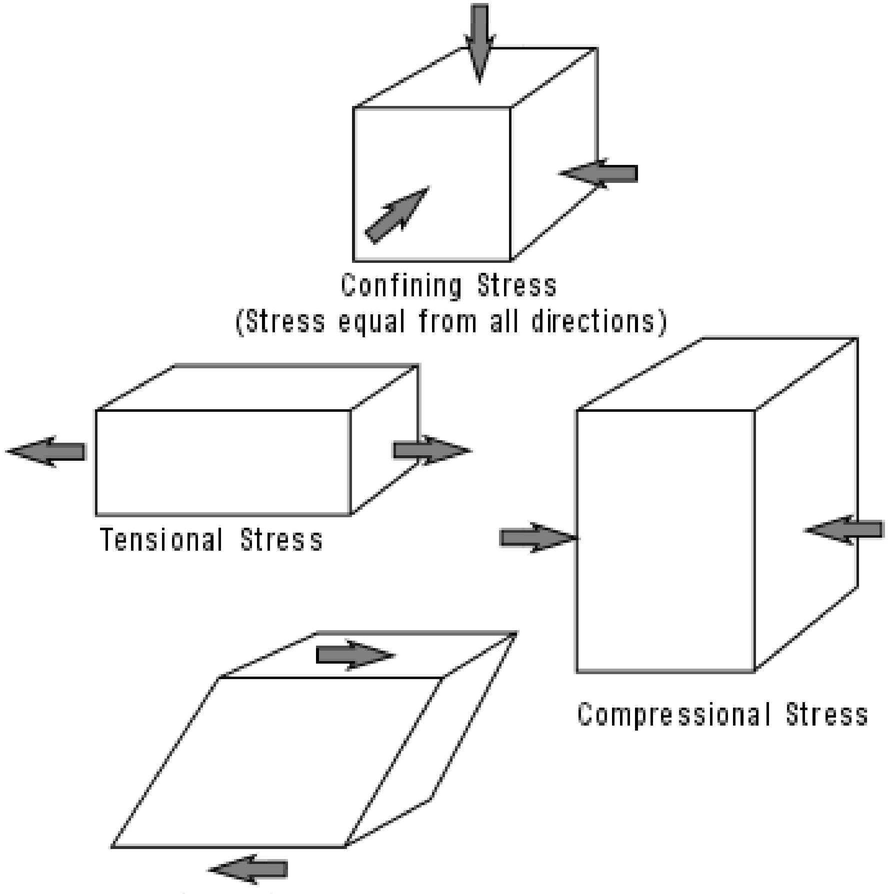
Shear Deformation of 2D-Flow



Example of 2D Flow: Step Flow

تانسور نرخ برش

در حالت کلی سه بعدی، المان مادی مکعبی شکل علاوه بر صفحه XY می تواند در صفحات XZ و YZ هم تغییر شکل برشی داشته باشد. همچنین این المان مکعبی می تواند تغییر شکل های کششی-فشاری روی وجوه خود داشته باشد. بنابراین نرخ برش دارای مولفه های تغییر شکلی متعددی بوده و بصورت یک تانسور مرتبه دوم متقارن به شکل زیر قابل تعریف است:



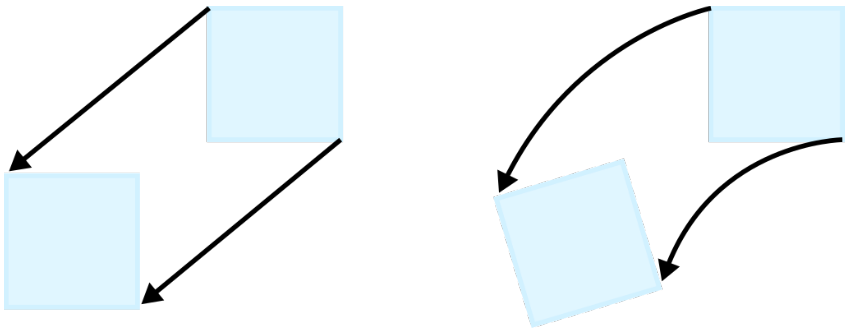
$$\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^{T} \qquad (۲۱)$$

در رابطه فوق، T علامت ترانهاده است. با قراردادن رابطه (۲) در رابطه (۲۱) داریم:

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

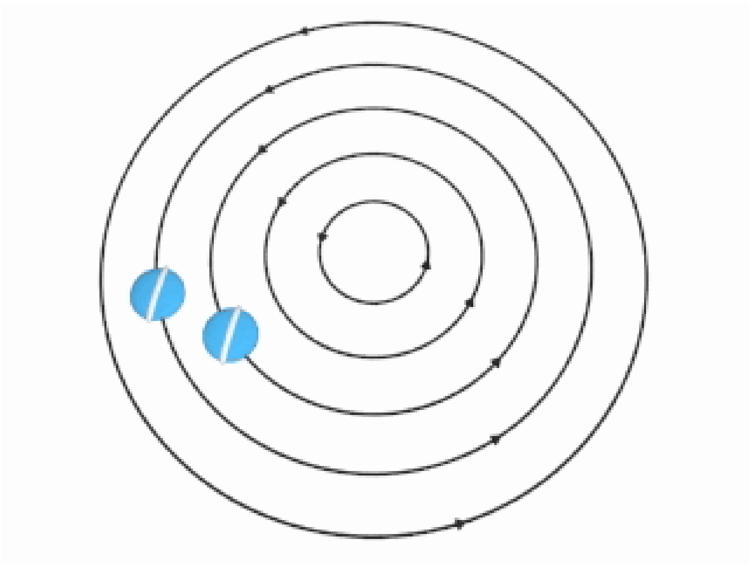
چرخش در جریان سیالات

چنانچه در جریان یک سیال، قطر المانهای مادی بچرخد، جریان چرخشی (Rotational Flow) نامیده می شود و چنانچه زاویه قطر المانهای مادی با گذر زمان تغییر نکند، جریان غیرچرخشی (Irrotational Flow) است.



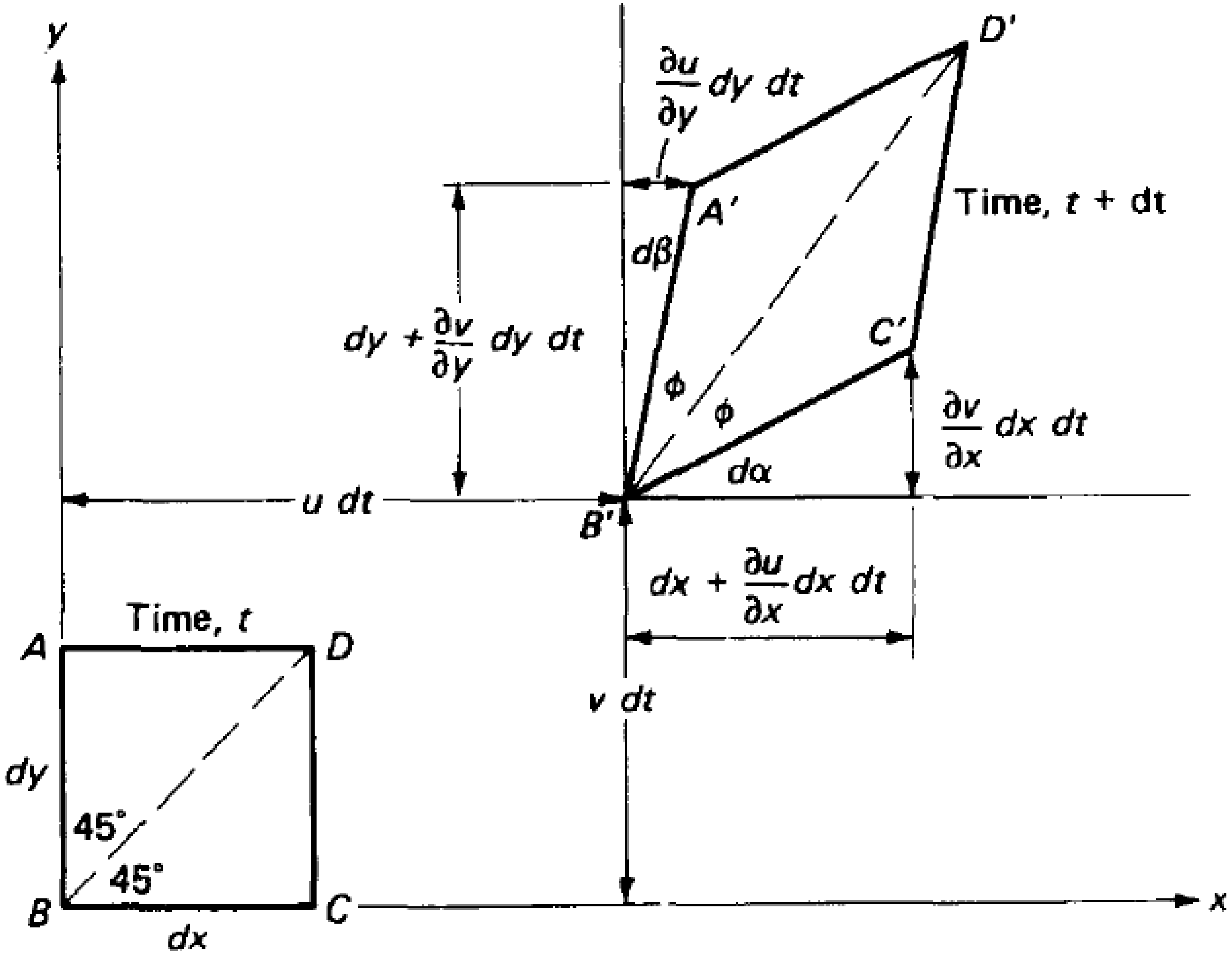
Irrotational and rotational motion

Vortex created by the passage of an aircraft wing



A rigid-body vortex

محاسبه چرخش در جریان سیالات



در شکل مقابل، یک المان مادی مربعی در دو لحظه t و $t+dt$ نشان داده شده است. در لحظه t زاویه قطر المان مادی ۴۵ درجه است و در اثر وجود یک جریان دو بعدی زاویه قطر المان مادی در لحظه $t+dt$ برابر $\Phi + d\alpha$ است. بنابراین مقدار زاویه چرخش بین دو لحظه مذکور برابر است با:

$$d\Omega_z = \Phi + d\alpha - 45^\circ \qquad (۲۳)$$

با توجه به شکل برای لحظه $t+dt$ داریم:

$$d\alpha + d\beta + 2\Phi = 90^\circ \;\rightarrow\; \Phi = 45^\circ - \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در (۲۳)، داریم:

$$d\Omega_z = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta) \qquad (۲۵)$$

ادامه محاسبه نرخ چرخش

با استفاده از بسط تیلور تغییرات میدان سرعت و نیز هندسه المان سیال در لحظه $t+dt$ داریم (شکل اسلاید قبلی):

$$d\alpha = \lim_{dt \to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial \upsilon/\partial x)\,dx\,dt}{dx + (\partial u/\partial x)\,dx\,dt}\right] = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}dt$$

$$d\beta = \lim_{dt \to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial u/\partial y)\,dy\,dt}{dy + (\partial \upsilon/\partial y)\,dy\,dt}\right] = \frac{\partial u}{\partial y}dt \qquad (۲۶)$$

بنابراین با قرار دادن رابطه (۲۶) در رابطه (۲۵)، نرخ چرخش **جریان دو بعدی** حول محور z بدست می آید:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۲۷)$$

نرخ چرخش قطر یک المان مکعبی در حالت **سه بعدی**، یک کمیت برداری است و این قطر حول هر سه محور x و y و z می تواند چرخش کند:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{d\Omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\Omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\Omega_z}{dt}\mathbf{k} \qquad (۲۸)$$

ادامه محاسبه نرخ چرخش

همانطور که در رابطه (۲۸)، بیان شد نرخ چرخش یک بردار است. چنانچه روند محاسبه قبلی برای صفحه XY را در خصوص صفحات XZ و YZ تکرار کنیم، می توانیم مولفه های چرخش قطر المان مکعبی شکل در حالت سه بعدی را به شرح زیر بدست آوریم:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}=\frac{d\Omega_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{d\Omega_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{d\Omega_z}{dt}\mathbf{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (۲۹)$$

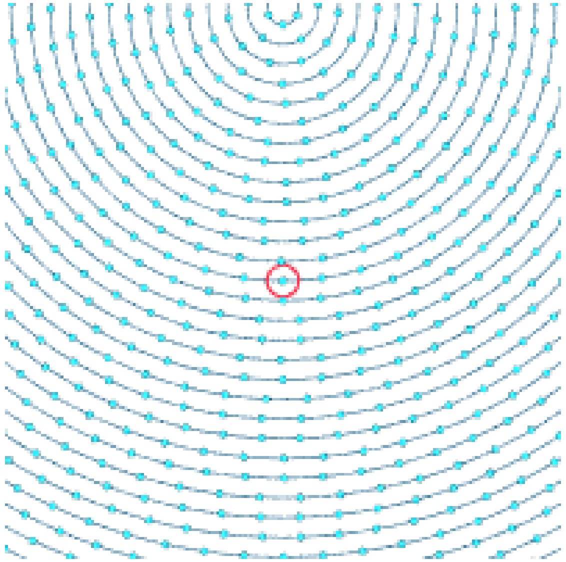
با مقایسه رابطه (۲۹) و رابطه (۹)، به سادگی نتیجه می شود که میان ورتیسیتی و نرخ چرخش رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{V} \qquad (۳۰)$$

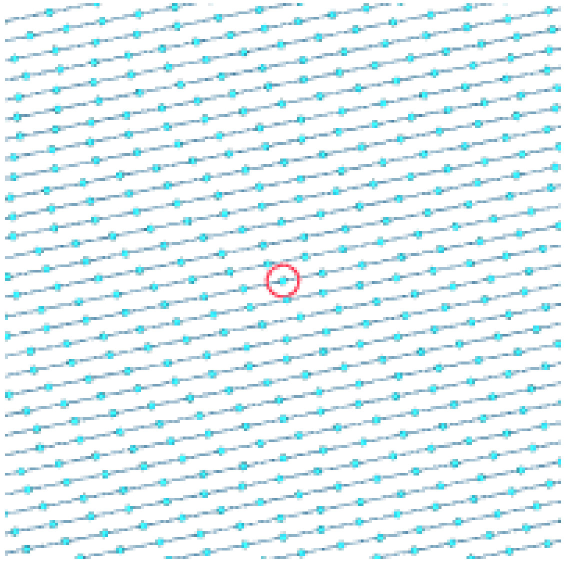
با توجه به رابطه ساده بین ورتیسیتی و نرخ چرخش (رابطه (۳۰)) و وجود یک فرمول ریاضی مناسب برای توصیف ورتیستی براساس کرل بردار سرعت (رابطه (۹))، معمولا از ورتیسیتی به عنوان معیاری برای چرخشی بودن یا نبودن جریانها و نیز تعیین شدت چرخش جریانهای چرخشی استفاده می شود.

جریانهای چرخشی

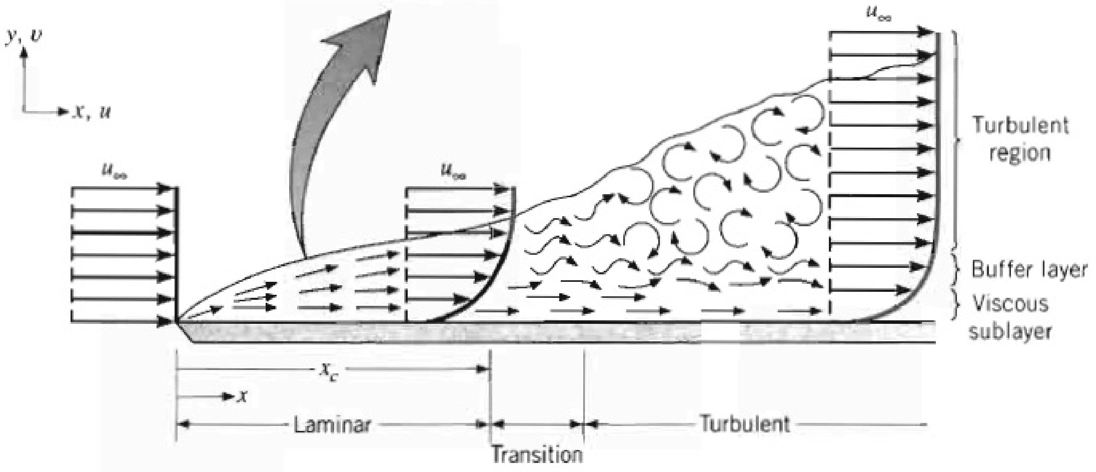
عمده جریانهای واقعی نظیر جریان داخل لایه مرزی، جریان داخل لوله و کانال، پرش هیدرولیکی، ناحیه ویک پشت اجسام، جریانهای گردابی محصول جدایش، جریان در توربوماشینها، جریانهای حاصل از جابجایی آزاد، کلیه جریانهای آشفته و … **چرخشی** محسوب می شوند.



A rigid-body vortex



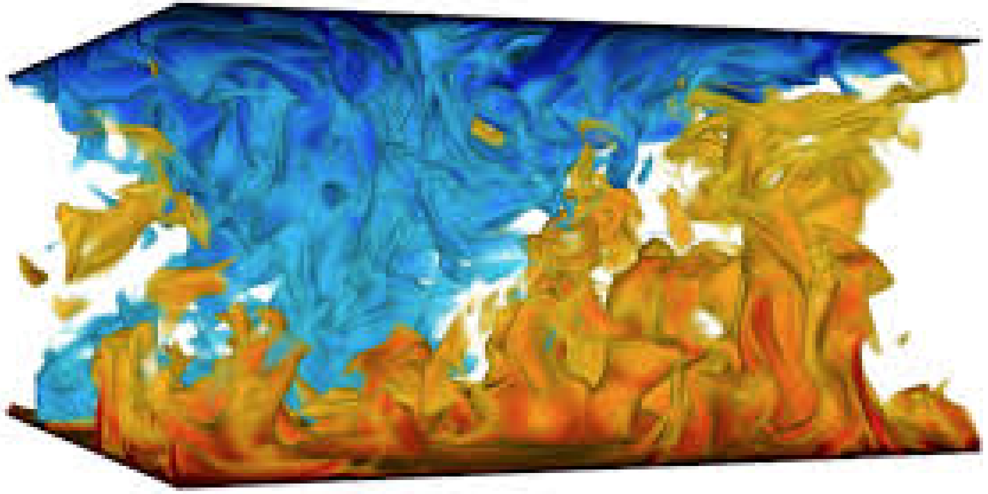
Simple shear flow



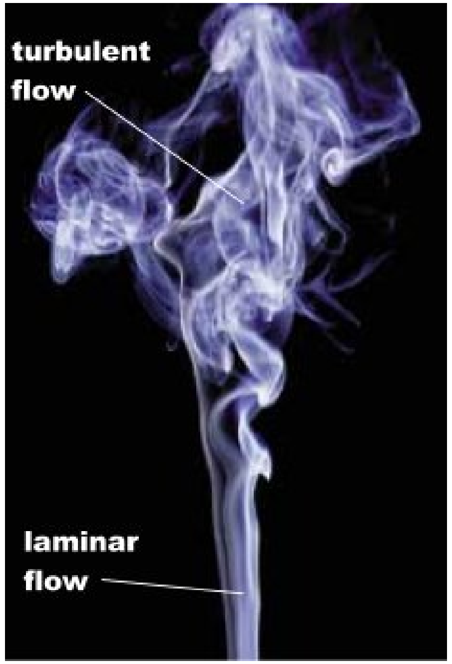
Boundary layer flow

مثالهایی از جریانهای چرخشی

Flow in wind turbine

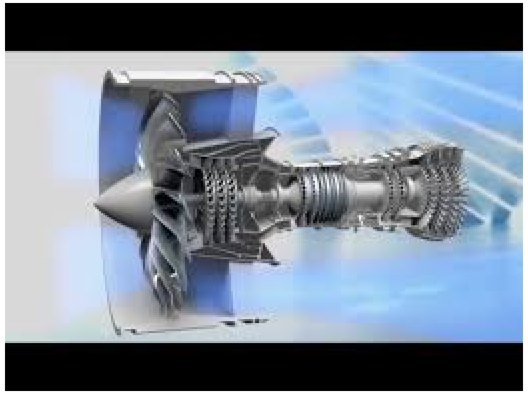


Rayleigh–Bénard convection

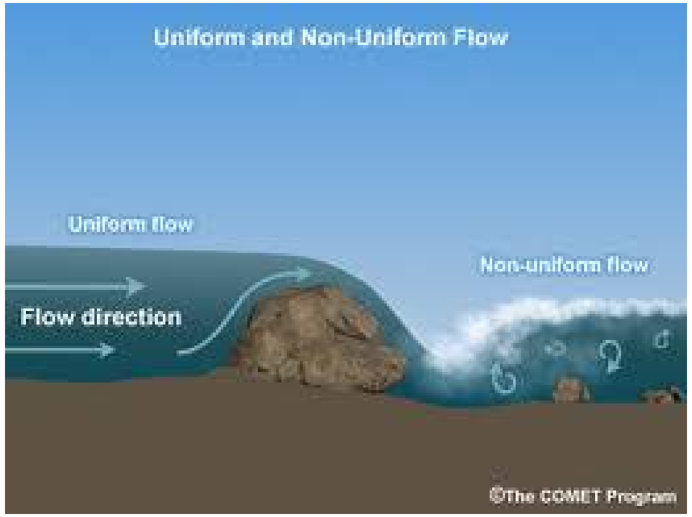


Smoke Flow

Flow around the airfoil



Flow inside the jet engine



Hydraulic jump

جریانهای غیر چرخشی و غیر ویسکوز

جریانهای غیر چرخشی و غیر ویسکوز که به جریانهای پتانسیل نیز معروف هستند، اصولا برای تحلیل جریان در خارج لایه مرزی مورد استفاده قرار می گیرند و دارای ویژگی های زیر می باشند:

۱- میدان سرعت این جریانها دارای یک تابع پتانسیل است: $\mathbf{V} = \nabla\phi \;\rightarrow\; u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x},\; v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \;\&\; w = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

۲- تابع پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می کند: $\nabla^2\phi = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$

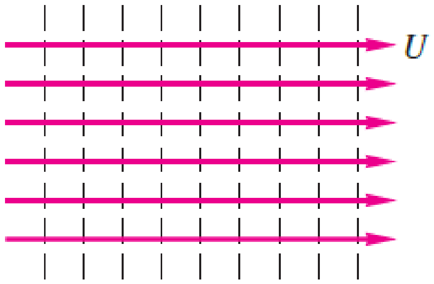
۳- میدان پتانسیل خطی بوده و اصل جمع آثار در آن صادق است: $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \ldots$

۴- معادله برنولی در این میدان جریان صدق می کند: $\dfrac{P}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z = cte$

۵- در این جریان شرط عدم لغزش روی سطوح جامد برقرار نیست و فقط مولفه نرمال سرعت روی سطح صفر است.

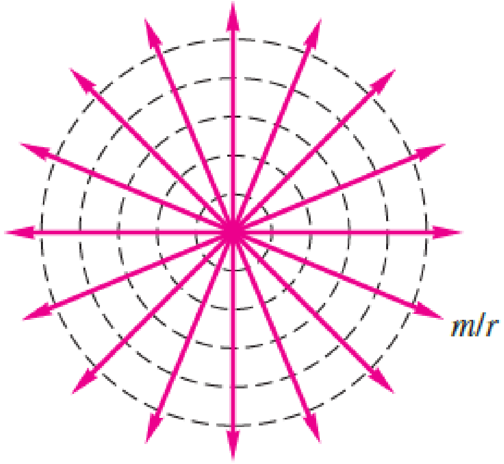
نکته: فصل هشتم کتاب وایت در خصوص جریانهای پتانسیل دوبعدی است.

مثالهایی از جریانهای غیر چرخشی: جریانهای ساده زیر همگی جریانهای غیر چرخشی محسوب می شوند، اما از آنجا که در جریانهای پتانسیل اصل جمع آثار صادق است، می توان با ترکیب تابع پتانسیل جریانهای ساده، جریانهای پیچیده تری را تولید کرد:



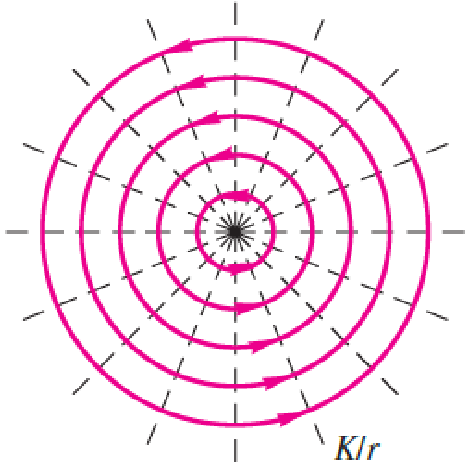
Uniform stream

$$u = U \ \& \ v = 0$$



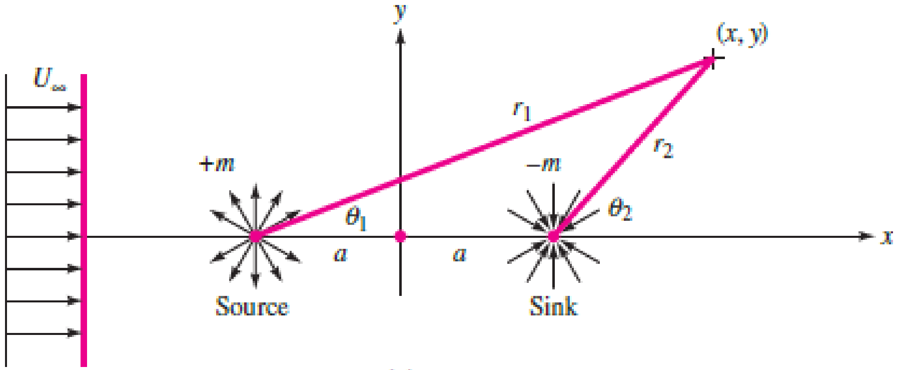
Source or Sink

$$v_r = \frac{m}{r} \ \& \ v_\theta = 0$$

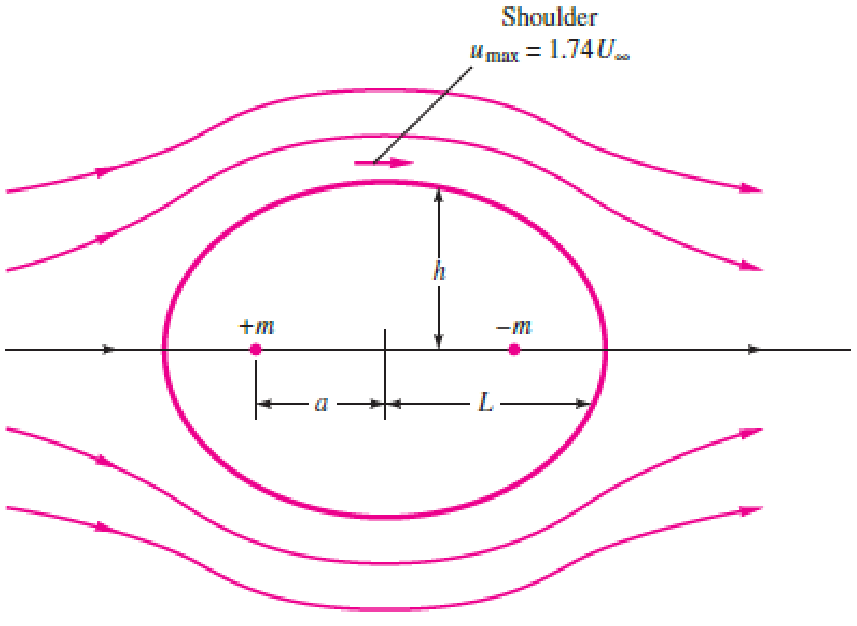


Irrotational Vortex

$$v_r = 0 \ \& \ v_\theta = \frac{K}{r}$$



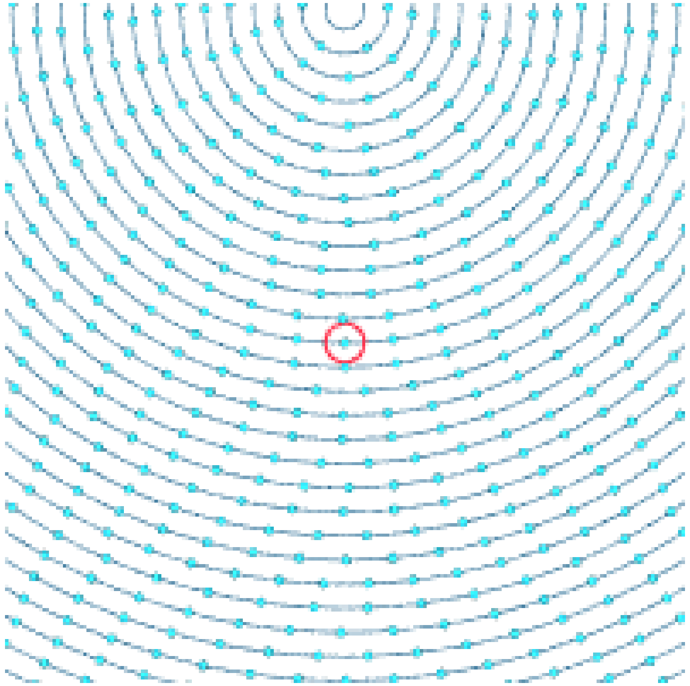
(a)



(b)

Combination of uniform stream, a source and a sink could generate a Rankine oval

گردابه غیر چرخشی (Irrotational Vortex): گردابه غیر چرخشی نوع خاصی از حرکت حلقوی (گردابی) است که در آن زاویه هر قطر المان از سیال در حین حرکت تغییر نمی کند و لذا این جریان غیرچرخشی محسوب می شود. در این جریان با نزدیک شدن به مرکز گردابه، سرعت زیاد و مطابق رابطه برنولی فشار کاهش خواهد یافت. جریان در یک گردباد یا گردابه سطحی شبیه این رفتار را از خود نشان می دهد، اما از لحاظ کمی از رابطه جریان گردابه غیرچرخشی تبعیت نمی کند.



Irrotational Vortex

A plughole vortex

Image of a tornado

نکاتی در خصوص معادله برنولی:

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=cte$$

می توان نشان داد که در جریانهای غیر ویسکوز، **معادله برنولی** برقرار است، اگر داشته باشیم: $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}).d\mathbf{r}=0$

در رابطه فوق، $d\mathbf{r}$ معرف دیفرانسیل جابجایی است. برای صفر بودن عبارت $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}).d\mathbf{r}$ می تواند حالات زیر برقرار باشد:

۱- سیال فاقد سرعت باشد ($\mathbf{V}=0$). در این حالت با یک مساله هیدرواستاتیک روبرو هستیم (فصل دوم کتاب وایت).

۲- جریان غیرچرخشی باشد ($\boldsymbol{\omega}=0$). در این حالت با یک جریان پتانسیل روبرو هستیم (فصل هشتم کتاب وایت).

۳- $d\mathbf{r}$ بر $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V})$ عمود باشد که این حالت بسیار خاص و نادر خواهد بود (چندان کاربردی ندارد).

۴- $d\mathbf{r}$ موازی سرعت $\mathbf{V}$ باشد. این حالت معرف حرکت بر روی خطوط جریان است (بیاد آورید که میدان سرعت بر خطوط جریان مماس است). بنابراین روی خطوط جریان معادله برنولی برقرار است.


The End